CONCOURS EXTERNE 1994

D'ELEVE-INGENIEUR DES TRAVAUX DE LA METEOROLOGIE

-=-=-=-=-=-=-=-=-

EPREUVE DE MATHEMATIQUES (I) Durée : 3 heures

Les deux parties sont indépendantes, à l'exception de la question II]6)b) qui utilise les résultats de la question I]4)d), et elles doivent être traitées toutes les deux.

- | -

Dans cette partie, φ désigne une fonction continue sur $]0, \pi[$, à valeurs réelles, admettant des limites finies en 0 et en π.

1) a) Prouver l'existence et l'unicité de la fonction h 2π-périodique, à valeurs réelles, impaire, telle que, pour tout x de $]0, \pi[$, $h(x) = \varphi(x)$.

b) Exprimer les coefficients de Fourier de la fonction h à l'aide d'intégrales portant sur φ.

2) a) Prouver l'existence et l'unicité de la fonction g 2π-périodique, à valeurs réelles, paire, continue sur $\mathbb{R}$, dérivable sur $]0, \pi[$ vérifiant:

$\int_0^{\pi} g(t)\,dt = 0$ et $g' = \varphi$ sur $]0, \pi[$

Expliciter g sur $]0, \pi[$ à l'aide de φ.

b) Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux et comparer g' et h.

c) Exprimer les coefficients de Fourier de la fonction g au moyen de ceux de la fonction h.

3) a) Prouver l'existence et l'unicité de la fonction f 2π-périodique, à valeurs réelles, impaire, continue sur $\mathbb{R}$, dérivable dans $]0, \pi[$ et vérifiant $f' = g$ sur cet intervalle.

b) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ et comparer f' et g.

c) Exprimer les coefficients de Fourier de la fonction f en utilisant ceux de la fonction g.

4) La fonction φ est définie sur $]0, \pi[$ par $\varphi(x) = -2$.

a) Déterminer sur $]-\pi, \pi[$ les fonctions h, g, f introduites précédemment. Représenter graphiquement ces fonctions sur $]-2\pi, 2\pi[$.

b) Calculer les coefficients de Fourier de h et en déduire ceux de g et ceux de f.

c) Ecrire les développements en série de Fourier des fonctions h, g, f en précisant leurs sommes en tout point x.

d) En utilisant les résultats précédents calculer les sommes des séries numériques suivantes:

$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{2p+1} \; ; \; \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^6} \; ; \; \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} \; .$$

Déduire de cette dernière la somme de la série numérique $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

- II -

1) a) Calculer l'intégrale indéfinie $\int \text{Ln } x \, dx$.

b) Etablir l'inégalité:

$$\left| \int_{\varepsilon}^{1} \frac{\text{Ln } x}{1+x} \, dx \right| < \int_{\varepsilon}^{1} \left| \text{Ln } x \right| dx$$

avec ε réel tel que $\varepsilon \in]0, 1[$

c) En déduire l'existence de l'intégrale impropre:

$$I = \int_{0}^{1} \frac{\text{Ln } x}{1+x} \, dx$$

2) Etablir l'égalité:

$$I = -\int_{0}^{1} \frac{\text{Ln}(1+x)}{x} \, dx$$

3) Donner le développement en série entière de la fonction: $x \longmapsto \frac{1}{x} \text{ Ln}(1+x)$ en précisant son rayon de convergence.

4) Soit la série de terme général $u_n : x \longmapsto u_n(x) = (-1)^n \frac{x^n}{n+1}$.
On se propose d'établir la convergence de la série (u_n), en tout point $x \in [0, 1]$, en démontrant la convergence de la suite (S_n) des sommes partielles S_n associées à cette série:

$$S_n : x \longmapsto S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} u_k(x)$$

a) Pour tout $x \in [0, 1]$ prouver que:

i) La suite (S_{2p}) des sommes de rang pair est monotone décroissante .

ii) La suite (S_{2p+1}) des sommes de rang impair est monotone croissante.

iii) Les deux suites (S_{2p}) et (S_{2p+1}) sont adjacentes.

En déduire que la série (u_n) converge pour tout $x \in [0, 1]$.

b) Soit R_n le reste d'ordre n de la série (u_n) :

$$R_n : x \longrightarrow R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x)$$

Démontrer les deux inégalités:

$$0 \leq R_{2p-1} \leq u_{2p}$$

et

$$-u_{2p+1} \geq -R_{2p} \geq 0$$

En déduire une majoration de $|R_n(x)|$ pour tout $x \in [0, 1]$ et pour tout $n \geq 1$.

5) Montrer que la série de fonctions (u_n) converge uniformément sur $[0, 1]$.

6) a) Déterminer alors l'intégrale I sous forme de somme de série convergente.

b) Donner la valeur de I en utilisant I]4)d).